KAJIAN STRUKTUR ALJABAR GRUP PADA HIMPUNAN FUNGSI KOMPOSISI

SKRIPSI

Oleh:
MULYANI
NIM. 07610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

KAJIAN STRUKTUR ALJABAR GRUP PADA HIMPUNAN FUNGSI KOMPOSISI

SKRIPSI

Diajukan kepada:
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang
untuk Memenuhi Salah Satu Persyaratan Dalam
Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)

Oleh:
MULYANI
NIM. 07610021

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MAULANA MALIK IBRAHIM
MALANG
2013

KAJIAN STRUKTUR ALJABAR GRUP PADA HIMPUNAN FUNGSI KOMPOSISI

SKRIPSI

Oleh:
MULYANI
NIM. 07610021

Telah Diperiksa dan Disetujui untuk Diuji
Tanggal 17 Mei 2013

Pembimbing I,	Pembimbing II,
Hairur Rahman, M.Si	**Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag**
NIP. 198004 20064 1 003	**NIP. 19720420 200212 1 003**

Mengetahui,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M.Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

KAJIAN STRUKTUR ALJABAR GRUP PADA HIMPUNAN FUNGSI KOMPOSISI

SKRIPSI

Oleh:
MULYANI
NIM. 07610021

Telah Dipertahankan di Depan Dewan Penguji Skripsi dan
Dinyatakan Diterima sebagai Salah Satu Persyaratan
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains (S.Si)
Tanggal: 27 Juni 2013

Penguji Utama	: Wahyu Henky Irawan, M.Pd NIP. 19710420 200003 1 003	_______________
Ketua Penguji	: Abdussakir, M.Pd NIP. 19751006 200312 1 001	_______________
Sekretaris Penguji	: Hairur Rahman, M.Si NIP. 19800429 200604 1 003	_______________
Anggota Penguji	: Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag NIP. 19720420 200212 1 003	_______________

Mengesahkan,
Ketua Jurusan Matematika

Abdussakir, M. Pd
NIP. 19751006 200312 1 001

PERNYATAAN KEASLIAN TULISAN

Saya yang bertanda tangan dibawah ini:

Nama : Mulyani

NIM : 07610021

Jurusan : Matematika

Fakultas: Sains dan Teknologi

Menyatakan dengan sebenarnya bahwa skripsi yang saya tulis ini benar-benar merupakan hasil karya saya sendiri, bukan merupakan pengambil-alihan data, tulisan atau pikiran orang lain yang saya akui sebagai hasil tulisan atau pikiran saya sendiri, kecuali dengan mencantumkan sumber cuplikan pada daftar pustaka.

Apabila di kemudian hari terbukti atau dapat dibuktikan bahwa skripsi ini hasil jiplakan, maka saya bersedia menerima sanksi atas perbuatan tersebut.

Malang, 31Mei 2013
Yang membuat pernyataan,

Mulyani
NIM.07610021

MOTTO

إِنَّ مَعَ ٱلْعُسْرِ يُسْرًا

"Sesungguhnya Sesudah Kesulitan itu Ada Kemudahan"

HALAMAN PERSEMBAHAN

Alhamdulillahi Robbil 'Alamin Segala Puja dan Puji Syukur

Penulis panjatkan kepada Allah SWT yang telah memberikan

Rahmat, Taufik serta Hidayah-Nya.

Skripsi ini penulis persembahkan kepada:

Bapak H. Muhktar, Ibu Siti Ramlah tercinta yang selalu memberikan

lantunan do'a serta motivasinya.

Kakak Ekawti, mas Rif'an dan adik-adik Nurhayati, Hamdiah dan Sri

Anita, yang selalu memberikan penulis semangat.

Serta, Keluarga Tercinta.

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَٰنِ الرَّحِيمِ

Assalamu'alaikum Wr.Wb.

Alhamdulillahirrobbil 'alamin, segala puji syukur ke hadirat Allah SWT atas limpahan rahmat, taufiq dan hidayah-Nya, hingga penulis mampu menyelesaikan penulis skripsi ini dengan baik. Sholawat serta salam semoga senantiasa tercurahkan kepada junjungan Nabi besar Muhammad SAW sebagai suri tauladan dalam meraih kesuksesan di dunia dan akhirat.

Penulis menyadari bahwa banyak pihak yang telah berpartisipasi dan membantu dalam menyelesaikan penulisan skripsi ini. Oleh karena itu, iringan do'a dan ucapan terimakasih yang sebesar-besarnya penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Prof. Dr. H. Mudjia Rahadjo, M.Si, selaku Rektor Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
2. Dr. Hj. Bayyinatul Muhtaromah,drh., M.Si, selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
3. Abdussakir M.Pd, selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
4. Hairur Rahman, M.Si, selaku Dosen Pembimbing, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini.
5. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag, selaku Dosen Pembimbing Agama, yang telah meluangkan waktunya untuk memberikan pengarahan selama penulisan skripsi ini
6. Seluruh Dosen Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang yang telah memberikan ilmu pengetahuan kepada penulis selama di bangku

kuliah, serta seluruh karyawan dan staf Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.

7. Bapak dan Ibu tercinta, yang selalu memberikan semangat dan motivasi baik dalam bidang moral maupun spiritual, dan perjuangannya yang tak pernah kenal lelah dalam mendidik dan membimbing penulis hingga penulis sukses dalam meraih cita-cita serta ketulusan do'anya kepada penulis sampai dapat menyelesaikan skripsi ini.
8. Kakak-kakak penulis Ekawati, mas Rif'an dan adik-adik tersayang, Nurhayati, Hamdiah dan Sri Anita yang telah memberikan semangat selama kuliah serta dalam menyelesaikan skripsi ini.
9. Sahabat Syuhadah, Asmah, Asri Rosarini Astari, Jainul, Uum Efiyah, Syifatur Rohmah, Siti Rahma dan Fatimah yang tidak pernah lelah memberikan motivasi, saran serta do'anya dalam menyelesaikan skripsi ini.
10. Teman-teman mahasiswa Jurusan Matematika 2007, terimakasih atas do'a serta kenangan yang telah kalian berikan.
11. Teman-teman kost. Ifah Fajarika, Tri Nurhayati, Anah Munawwaroh, Firdi, Rukayah, yang telah menemani penulis dalam menyusun skripsi ini.
12. Semua Pihak yang tidak mungkin penulis sebutkan satu persatu, atas keikhlasan bantuan dan do'anya penulis mengucapkan terimakasih.

Semoga skripsi ini bermanfaat dan dapat menambah wawasan keilmuan khususnya matematika. Amin

Malang, 27 Juni 2013

Penulis

DAFTAR ISI

BAB III PEMBAHASAN

BAB IV PENUTUP

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

ABSTRAK

Mulyani. 2013. ***Kajian Struktur Aljabar Grup pada Himpunan Fungsi Komposisi.*** Skripsi. Jurusan Matematika. Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang.
Pembimbing: (1) Hairur Rahman, M.Si
(2) Dr.H.Munirul Abidin, M.Ag

Kata kunci: fungsi komposisi, grup.

Materi yang dibahas pada aljabar abstrak pada dasarnya tentang himpunan dan operasinya, dan selalu identik dengan sebuah himpunan yang tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Suatu himpunan yang dilengkapi dengan satu atau lebih operasi biner disebut struktur aljabar atau sistem aljabar.

Sistem aljabar dengan satu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat tertentu dikenal dengan Grup.

Jika terdapat fungsi $R \rightarrow R$ yang telah di definisikan sebagai berikut yaitu : $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{x},\ f_5(x) = 1 - x,\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ dengan anggota $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ yang di operasikan dengan operasi komposisi merupakan grup. Maka berdasarkan pada latar belakang tersebut, penulis akan membahas tentang grup pada himpunan fungsi komposisi.

Dalam pembahasan, penulis memperoleh bahwa (G, o) merupakan suatu grup karena memenuhi semua aksioma-aksioma grup yakni dengan menggunakan table komposisi.

Hal-hal yang dibahas dalam skripsi ini hanya sebagian kecil dari grup pada fungsi komposisi. Oleh karena itu, diharapkan kepada para penulis yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai grup pada fungsi dengan opersai-operasi yang lain.

ABSTRACT

Mulyani. 2013. ***The study of algebra group's structure on the set composition of functions*.** Thesis, Mathematic Department, Faculty of Science and Technology, Maulana Malik Ibrahim State Islamic University of Malang. Advisor:

1. Hairur Rahman, M.Si
2. Dr. H. Munirul Abidin, M.Ag

Key words: composition of function and group.

The content of algebra abstract is basically about the set and its operation. It closely related to an unempty set which has elements to be operated with one or more binary operation. A set which is completed with one or more binary operation is called algebra structure or algebra system.

Furthermore, group is algebra system with a binary operation which is qualified.

If there is seen a function R → R which is defined as: $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{x},\ f_5(x) = 1 - x,\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ with the member $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$which is operated with composition operation (o), so it is called group. Therefore, based on that background of study, the researcher will discuss the group on the set of function composition.

On the discussion, the researcher found that (G, o) is a group because it is have qualified axioms group which use table of composition.

The points that are discussed in this study are only a little piece of groups on the function of composition. Therefore, the researcher suggests to other researchers to conduct any researchs deeper about group on the function of other operations.

ملخص البحث

مولياني. ٢٠١٣. دراسة الهيكل المجموعة الجبر في تجمع التكوين الوظيفة. ، أطروحة، قسم الرياضيات كلية العلوم والتكنولوجيا في الجامعة الإسلامية الحكوميه مولانا مالك إبراهيم بمالانج

المشرف :(1)حير الرحمان الماجستير

(2)الأستاذ الحاج منير العابدين الماجستير .

كلمات البحث: تكوين وظيفة و المجموعة.

المواد المشمولة في الجبر المجرد الأساسي هي البحث في المجموعة وعملياتها، وعلي الدوام، مرادف بمجموعة غير فارغة من العناصر المعمول بواحد أو أكثر من العمليات الثنائية. والمجموعة التي تضم واحدة أو أكثر من العمليات الثنائية تسمي بهيكل الجبر أو نظام الجبر .

نظام الجبر بعملية ثنائية واحدة المشمول ببعض الخصائص المعروفة بالمجموعة .

إذا كان وظيفة R → R التي تُعْرَفُ على النحو التالي، $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{x},\ f_5(x) = 1-x,\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}$ مع $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ المقصود للعمل مع عملية تكوين (س) هو مجموعة. مستندا على هذه الخلفية، سيبحث المؤلف عن المجموعة على تجمُّعِ التكوين الوظيفة .

في البحث، حصل المؤلف علي أنَّ (G, o) ، هي مجموعة لاشتمالها علي جميعِ بديهيات المجموعة باستخدام الجدول التكويني

المبحوث في هذا المقال هي جزءٌ صغير من المجموعة في وظيفة التكوين. ولذلك، نرجو من المؤلفين الآخر أن يبحثوا المجموعة في الوظيفة الأخري بحثا عميقا.

BAB I

PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Ilmu adalah pengetahuan tentang sesuatu bidang yang disusun secara bersistem menurut metode-metode tertentu yang dapat di gunakan untuk menerangkan gejala-gejala tertentu di bidang pengetahuan itu (Kamus Besar Bahasa Indonesia, 1989). Ibnu Khaldun membagi kelompok ilmu kedalam dua kelompok yaitu:

1. Ilmu yang merupakan suatu yang alami pada manusia, yang ia bisa menemukannya karena kegiatan berpikir.
2. Ilmu yang bersifat tradisional (naqli) (Rachman, 2006:257).

Al-Qur'an telah menganjurkan umat Islam untuk bersungguh-sungguh pada pencarian ilmu pengetahuan. Hal ini karena dunia sekarang dan masa depan adalah dunia yang dikuasai oleh IPTEK (Ilmu Pengetahuan dan Teknologi). Oleh karena itu, barang siapa yang menguasai keduanya maka secara lahiriah akan menguasai dunia.

Semua yang ada didalam dunia ini ada ukuranya, ada hitung-hitungannya, ada rumusnya, atau ada persamaannya. Rumus-rumus yang ada sekarang bukan di ciptakan manusian sendiri, tetapi sudah di sediakan. Manusia hanya menemukan dan menyimbolkan dalam bahasa matematika (Abdussakir, 2007:80).

Secara bahasa, kata "matematika" berasal dari bahasa Yunani yaitu "*mathema*" atau mungkin juga "*mathematikos*" yang artinya hal-hal yang dipelajari.

Orang Belanda menyebut matematika dengan *wiskunde* yang artinya ilmu pasti. Sedangkan orang Arab menyebut matematika dengan *'ilmu al-hisab*, artinya ilmu berhitung. Secara istilah, sampai saat ini belum ada definisi yang tepat mengenai matematika. Definisi-definisi yang dibuat para ahli matematika semuanya benar berdasar sudut pandang tertentu. Meskipun belum ada definisi yang tepat, matematika mempunyai ciri khas yang tidak dimiliki pengetahuan lain, yaitu merupakan abstraksi dari dunia nyata, menggunakan bahasa simbol, dan menganut pola pikir deduktif (pola berpikir yang didasarkan pada kebenaran-kebenaran yang secara umum sudah terbukti benar) (Abdussakir, 2007: 5). Sumber studi matematika, sebagaimana sumber ilmu pengetahuan dalam islam adalah tauhid, yaitu ke-Esa-an Allah. Akan tetapi Al-Quran tidak mengangkat metode baru dalam masalah ini, melainkan telah menunjukkan tentang adanya eksistensi dari sesuatu yang ada di balik alam semesta itu sendiri. Alam semesta serta segala isinya diciptakan Allah dengan ukuran-ukuran yang cermat dan teliti, dengan perhitungan-perhitungan yang mapan, dan dengan rumus-rumus serta persamaan yang seimbang dan rapi.

Dalam Al-Qur'an surat Al-Qamar ayat 49 disebutkan,

إِنَّا كُلَّ شَيۡءٍ خَلَقۡنَٰهُ بِقَدَرٍ

Artinya: *"Sesungguhnya kami menciptakan segala sesuatu menurut ukuran."*

Ayat di atas menjelaskan bahwa semua yang ada di alam ini ada ukurannya, hitungannya, rumusnya, atau persamaannya. Ahli matematika atau fisika tidak membuat suatu rumus sedikitpun. Mereka hanya menemukan rumus atau persamaan

(Abdussakir,2007:80). Jadi matematika sebenarnya telah diciptakan sejak zaman dahulu, manusia hanya menyimbolkan fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan sehari-hari. Manusia dianugerahi Allah petunjuk dengan kedatangan sekian rasul untuk membimbing mereka. Allah juga menganugerahkan akal agar mereka berpikir tentang kebesaran Tuhan. Semua anugerah itu termasuk dalam sistem yang sangat tepat, teliti, dan rapi yang telah ditetapkan Allah SWT. Dalam Al-Quran surat Al-Furqaan ayat 2:

ٱلَّذِى لَهُۥ مُلْكُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَلَمْ يَتَّخِذْ وَلَدًا وَلَمْ يَكُن لَّهُۥ شَرِيكٌ فِى
ٱلْمُلْكِ وَخَلَقَ كُلَّ شَىْءٍ فَقَدَّرَهُۥ تَقْدِيرًا ﴿٢﴾

Artinya: *"Yang kepunyaan-Nya-lah kerajaan langit dan bumi, dan dia tidak mempunyai anak, dan tidak ada sekutu baginya dalam kekuasaan(Nya), dan dia Telah menciptakan segala sesuatu, dan dia menetapkan ukuran-ukurannya dengan serapi-rapinya"*

Dalam kehidupan sehari-hari, manusia tidak lepas dari berbagai masalah yang menyangkut berbagai aspek penyelesaiannya perlu pemahaman melalui sesuatu metode dan ilmu bantu tertentu. Matematika merupakan salah satu cabang ilmu yang mendasari berbagai macam ilmu lain. Matematika juga merupakan alat untuk menyederhanakan penyajian dan pemahaman masalah (Purwanto, 1998:1). Seiring dengan perkembangan zaman, keilmuan matematika juga berkembang dalam konsep dan penerapannya, baik penerapan dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam hubungannya dengan disiplin ilmu lainnya. Matematika mempunyai beberapa cabang keilmuan yang masing-masing mempunyai penerapan dalam hubungannya dengan berbagai disiplin ilmu lain dan dalam kehidupan sehari-hari. Salah satu dari cabang-cabang ilmu tersebut adalah Aljabar abstrak. Aljabar abstrak merupakan bagian dari ilmu matematika yang berkembang dengan pesat karena berhubungan dengan himpunan, dan sifat struktur-struktur di dalamnya.

Salah satu yang dipelajari dalam ilmu aljabar abstrak adalah teori tentang grup. Grup adalah sebuah pasangan berurutan $(G,*)$ dimana G adalah sebuah himpunan dan " $*$ " adalah sebuah operasi biner pada G yang memenuhi aksioma-aksioma tertentu yaitu tertutup, bersifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemennya. Seperti konsep dalam himpunan, dalam grup juga terdapat subgrup yaitu jika $(G,*)$ grup, $H \subseteq G$, maka $(H,*)$ adalah subgrup dari grup $(G,*)$ jika $(H,*)$ juga grup.

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, dan aljabar. Teori tentang grup, dimana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,\circ)$ dengan G tak-kosong dan " $\circ$ " adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemen dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan oleh Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi.

Berdasarkan latar belakang tersebut, peneliti tertarik untuk membahas tentang "***grup pada fungsi komposisi*** " dengan harapan dapat lebih memperdalam materi dan dapat memberikan referensi yang berhubungan dengan penelitian tersebut. Hasil dari penelitian ini dapat dijadikan teorema sebagai tambahan pustaka perkuliahan, khususnya bidang aljabar. Peneliti mengambil obyek grup pada fungsi komposisi dengan alasan hasil penelitian ini dapat menambah informasi baru tentang sifat-sifat grup pada fungsi komposisi yang berkaitan dengan aljabar abstrak.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, rumusan masalah dalam penelitian ini adalah bagaimana mengkaji suatu grup pada himpunan fungsi komposisi?

1.3 Tujuan Penelitian

Berdasarkan rumusan masalah di atas, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui bagaimana mengkaji suatu grup pada himpunan fungsi komposisi.

1.4 Manfaat Penelitian

Hasil penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat bagi:

1. Peneliti

Peneliti memperoleh tambahan pengetahuan tentang Aljabar Abstrak, khususnya tentang *fungsi, fungsi komposisi, grup.*

2. Lembaga

   Bagi lembaga, sebagai tambahan pustaka untuk bahan perkuliahan tentang *fungsi, fungsi komposisi*, *grup* dari suatu fungsi.

3. Pembaca

   Pembaca memperoleh pengetahuan tambahan mengenai salah satu materi disiplin ilmu Matematika, yaitu bidang Aljabar Abstrak, khususnya tentang *fungsi, fungsi komposisi, grup.*

1.5 Batasan Masalah

Adapun batasan masalah pada penelitian ini adalah penulis hanya membatasi pada grup pada fungsi komposisi.

1.6 Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode studi literatur yaitu penelitian yang dilakukan dengan mengumpulkan teori dan informasi yang berhubungan dengan penelitian dengan bantuan referensi yang terdapat di ruang perpustakaan seperti buku-buku.

Langkah-langkah yang dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Identifikasi masalah mengenai permasalahan yang ada pada *grup pada fungsi komposisi.*

2. Mengumpulkan sumber-sumber referensi pendukung dari internet yang berupa definisi, sifat-sifat, dan teorema-teorema tentang fungsi, fungsi komposisi, operasi biner, grup, subgrup, dan lain-lain yang berkaitan dengan skripsi.
3. Merumuskan masalah tentang *grup pada himpunan fungsi komposisi*,
4. Mengumpulkan data berupa penentuan grup,
5. Menganalisis:
    a. Membuat table komposisi.
    b. Membuktikan $G = \{f/f\ ;\ R\ ke\ R\ adalah\ bijektif\}$.
    c. Membuktikan (G, o) merupakan grup.
6. Merumuskan kesimpulan dari hasil pembahasan yang telah dikemukakan berdasarkan rumusan masalah.

1.7 Sistematika Penulisan

Agar penulisan penelitian ini sistematis dan mempermudah pembaca memahami tulisan ini, penulis membagi tulisan ini ke dalam empat bab sebagai berikut:

1. Bab I Pendahuluan

Bab ini membahas tentang latar belakang, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, metode penelitian, dan sistematika penulisan.

2. Bab II Kajian Pustaka

Bab ini membahas tentang teori-teori yang berhubungan dengan penelitian yaitu tentang himpunan, relasi, fungsi, fungsi identitas, fungsi surjektif, injektif, bijektif, fungsi invers, operasi biner, grup, sifat-sifat grup, tabel cayley, subgroup, dan kajian agamanya.

3. Bab III Pembahasan

Bab ini membahas tentang fungsi komposisi, membuat tabel fungsi komposisi, dan membuktikan bahwa $G = \{f / f \ ; R \rightarrow R\}$ adalah bijektif dan juga merupakan grup.

4. Bab IV Penutup

Bab ini berisi kesimpulan dari materi yang dibahas dan saran peneliti untuk pembaca dan peneliti selanjutnya.

BAB II

KAJIAN PUSTAKA

2.1 Himpunan

Istilah himpuanan seringkali dijumpai ketika mempelajari aljabar abstrak. Hal ini dikarenakan himpunan merupakan dasar dari berbagai pembahasan-pembahasan mengenai struktur aljabar. Definisi himpunan dapat dilihat sebagai berikut:

Definisi 1

Himpunan adalah kumpulan obyek–obyek yang mempunyai sifat yang sama, obyek–obyek tersebut selanjutnya disebut sebagai anggota dari himpunan (Bhattacharya, 1990:3).

Obyek tersebut dapat berupa benda konkrit, seperti meja, kursi, dan lain-lain, atau dapat pula berupa benda abstrak seperti bilangan, fungsi dan yang sejenisnya.

Misal A adalah himpunan, jika x sebuah obyek pada A, maka x dikatakananggota dari A dan ditulis $x \in A$. Jika A tidak mempunyai anggota himpunan kosong dan dinotasikan dengan $A = \varphi$. Jika A mempunyai anggota sekurang-kurangnya satu anggota maka A disebut himpunan tak kosong. Jika A adalah himpunan berhingga, banyaknya obyek yang berbeda di A disebut order dan dinotasikan $|A|$.

Contoh:

A adalah himpunan semua bilangan prima yang kurang dari 10, maka $A = \{2,3,5,7\}$

Atau dapat ditulis sebagai

$A = \{x | x < 10, x \epsilon\ Prima\}$

Order A adalah $|A| = 4$

Definisi 2

Misal A dan B himpunan, himpunan A dikatakan himpunan bagian dari himpunan B jika memenuhi $\forall a \epsilon A \Rightarrow b \epsilon B$ dan dinotasikan $A \subseteq B$ (A termuat dalam atau sama dengan B) (Bhattacharya, 1990:40).

Contoh:

Misalkan $A = \{5n | n \epsilon N\}$

$B = \{2n - 1 | n \epsilon N\}$

$N = \{1,2,3,4,5,6,7,8, \dots\}$

Maka $A \subset N$ dan $B \subset N$ tetapi $A \not\subset B$ (A bukan himpunan bagian dari B). Setiap anggota dari A adalah juga anggota dari N. Setiap anggota dari B adalah juga anggota dari N. Tetapi tidak setiap anggota dari A merupakan anggota dari B.

2.2 Relasi

Suatu relasi f dari suatu himpunan A ke himpunan B adalah sub himpunan dari $A \times B$. Himpunan $\{x: (x, y) \in f\}$ disebut daerah asal (domain) dari f dan himpunan $\{y: (x, y) \in f\}$ disebut himpunan daerah hasil (range). Invers dari f, dinotasikan f^{-1}, adalah relasi dari B ke A didefinisikan sebagai $f^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in f\}$. Jika $A = B$, sebarang sub himpunan dari $A \times A$ disebut relasi dalam himpunan A. Jika f suatu relasi dan $(x, y) \in f$, dikatakan bahwa x direlasikan oleh f ke y (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 11).

Contoh

Misalkan $P = \{2,3,4\}$ dan $Q = \{2,4,8,9,15\}$. Jika didefinisikan relasi R dari P ke Q dengan $(p, q) \in R$ jika p habis membagi q maka diperoleh $R = \{(2,2), (2,4), (4,4), (2,8), (4,8), (3,9), (3,15)\}$.

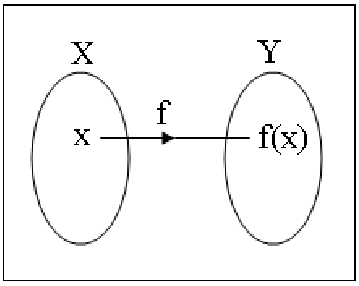
2.3 Fungsi (Pemetaan)

Misalkan X dan Y adalah dua himpunan tak-kosong, maka fungsi atau pemetaan dari X ke Y adalah suatu korespondensi yang menghubungkan setiap elemen x dari X, suatu elemen tunggal dinyatakan oleh $f(x)$ dari Y dan ditulis:

$$f: X \to Y$$

yang berarti bahwa f adalah pemetaan dari X ke Y. Elemen $f(x)$ dari Y terhubung dengan elemen x dari X disebut *image* dari x atau bayangan dari x, sedangkan x disebut *pre-image* dari $f(x)$ (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 14).

Fungsi *f* memetakan X ke Y dapat direpresentasikan dengan gambar berikut:



Gambar 2.3: Fungsi f Memetakan X ke Y

Contoh

Misalkan $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Daerah asal dari f adalah himpunan bilangan bulat, dan *image* dari f adalah himpunan bilangan bulat tidak-negatif (karena kuadrat dari sembarang bilangan bulat tidak mungkin negatif).

Jika f adalah suatu pemetaan dari X ke Y, maka tidak mungkin bahwa sebuah elemen dari X boleh mempunyai dua *image*. Di pihak lain, hal ini sangat memungkinkan bahwa dua atau lebih elemen-elemen X mempunyai *image* yang sama. Jika setiap elemen dari X yang berbeda tidak ada yang mempunyai *image* yang sama, yaitu elemen-elemen yang berbeda dari X mempunyai *image-image* yang berbeda, maka pemetaan tersebut disebut fungsi satu-satu. Jadi, f adalah fungsi satu-satu jika dan hanya jika $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Dalam pemetaan ini, setiap elemen dari X harus mempunyai *image* di Y, tetapi beberapa elemen dari dari Y boleh tidak mempunyai *pre-image* sama sekali. Jika setiap elemen dari Y mempunyai sekurang-kurangnya satu *pre-image* di X, maka pemetaan tersebut disebut fungsi onto (fungsi pada). X disebut domain (daerah asal) dari f dan himpunan $f(X)$ terdiri dari semua *image* dari elemen-elemen X disebut range (daerah hasil) dari f. Jadi, f adalah fungsi onto jika dan hanya jika $f(X) = Y$. Pemetaan I dari X ke X didefinisikan $I(x) = x, \forall x \in X$ disebut pemetaan identitas pada X. Jika fungsi f adalah fungsi satu-satu sekaligus fungsi onto, maka fungsi f disebut fungsi bijektif (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 14).

Contoh

Relasi $f = \{(1, x), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w, x\}$ merupakan fungsi injektif karena tidak ada dua elemen A yang mempunyai bayangan yang sama.

Contoh

Relasi $f = \{(1, w), (2, u), (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ merupakan fungsi pada karena semua elemen B merupakan hasil dari f.

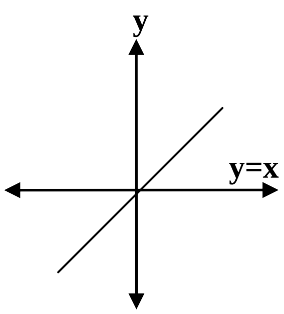
Contoh

Relasi $f = \{(1, u), (2, w), (3, v)\}$ dari $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u, v, w\}$ adalah fungsi yang berkorespondensi satu-satu, karena f adalah fungsi satu-satu maupun fungsi pada.

2.4 Fungsi Identitas

Misal A adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke A atau f : A → A. jika setiap anggota himpunan A dipasangkan oleh f kepada dirinya sendiri, dengan kata lain f(x) = x, ∀ x ∈ A, maka fungsi f disebut fungsi identitas.

Digambarkan pada kartesius berikut.



Gambar 2.4

2.5 Fungsi Surjektif (kepada atau onto)

Misalkan *A* dan *B* adalah himpunan, dan *f* adalah fungsi dari *A* ke *B*. Fungsi *f* disebut fungsi pada jika *R(f)* = *B*. Jadi, *f : A*→*B* disebut fungsi pada jika untuk masing-masing y ∈ B dan x∈A sehingga *f (x)* = *y* . Fungsi pada sering disebut juga dengan fungsi surjektif atau fungsi onto. Jika *f* fungsi surjektif, maka *f* disebut surjeksi (Bartle danSherbert, 2000:8).

Contoh (2): Selidiki apakah g : $Z \rightarrow Z^+$ yang didefinisikan oleh g(x) = x^2 adalah fungsi onto!

Jawab : ambil $2 \in Z^+$ Sedemikian hingga $x^2 = 2$

$$x = \pm\sqrt{2} \in Z$$

berarti 2 tidak punya prapeta di Z

Jadi g(x) = x^2 bukan fungsi onto.

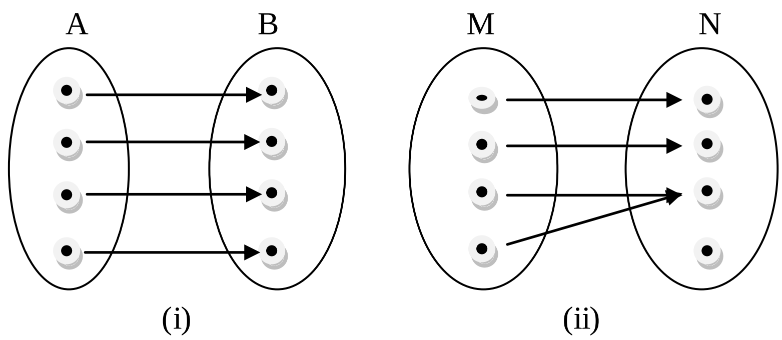
2.6 Fungsi Injektif

Misal A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, fungsi f dikatakan fungsi injektif (satu-satu) jika $\forall\, x_1,\ x_2 \in$ A dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Dengan kata lain dapat dinyatakan bahwa $\forall\, x_1,\ x_2 \in$ A dengan $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.

Dari pernyataan diatas maka berakibat bahwa anggota himpunan A yang berbeda (prapeta berbeda) akan mempunyai bayangan yang berbeda pula.

Fungsi 1-1 dapat digambarkan pada diagram panah sebagai berikut.



(i) (ii)

Contoh (1): Selidiki apakah f : R → R yang didefinisikan oleh $f(x) = 2\mathrm{x} - 3$ adalah fungsi injektif!

Jawab : $ambil\ x_1,\ x_2 \in R\ f(x_1) = 2x_1 - 3\ dan\ f(x_2) = 2x_2 - 3$

$misal\ f(x_1) = f(x_2)\ maka\ 2x_1 - 3 = 2x_2 - 3$

$$2x_1 = 2x_2$$

$$x_1 = x_2$$

Karena $x_1,\ x_2 \in R$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ berlaku $x_1 = x_2$ maka fungsi $f(x) = 2x - 3$ adalah fungsi 1-1.

Contoh (2): Selidiki apakah g : R → R yang didefinisikan oleh $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2 - 1$ adalah fungsi 1-1!

Jawab : ambil sebarang a, b ∈ R maka $\mathrm{f(a)} = \mathrm{a}^2 - 1$ dan $\mathrm{f(b)} = \mathrm{b}^2 - 1$

misal $\mathrm{f(a)} = \mathrm{f(b)}$ maka $\mathrm{a}^2 - 1 = \mathrm{b}^2 - 1$

sehingga $\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2$

$$\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2 = 0$$

$$(\mathrm{a} + \mathrm{b})(\mathrm{a} - \mathrm{b}) = 0$$

$\mathrm{a} = -\mathrm{b}$ atau $\mathrm{a} = \mathrm{b}$

Jadi $\mathrm{g(x)} = \mathrm{x}^2 - 1$ bukan fungsi 1-1

2.7 Fungsi Bijektif (1-1 dan onto)

Misal A dan B adalah sebarang himpunan. Misal f adalah suatu fungsi dari himpunan A ke himpunan B, fungsi f dikatakan fungsi bijektif jika f adalah fungsi onto (surjektif) dan 1-1 (injektif).

Selanjutnya untuk menyelididki suatu fungsi adalah bijektif maka harus ditunjukkan bahwa fungsi tersebut adalah onto dan menunjukkan pula bahwa fungsi tersebut 1-1.

Contoh (1): Selidiki apakah f : Z → 2Z yang didefinisikan oleh *f(x) = 4x* adalah fungsi bijektif!

Jawab : Z = {…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,…}

2Z = {…,-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6,…}

(i) Pertama, akan diselidiki bahwa fungsi tersebut apakah 1-1.

Ambil sebarang a, b, ∈ Z maka f(a) = 4a dan f(b) = 4b

Misal f(a) = f(b) maka berlaku 4a = 4b sehingga a = b.

Karena untuk sebarang a, b, ∈ Z dengan f(a) = 4a berlaku a = b

Maka f(x) = 4a adalah fungsi 1-1.

(ii) Kedua, akan diselidiki apakah fungsi tersebut adalah onto.

Ambil 2 ∈ 2Z yang berarti f(a) = 2

Sehingga 4a = 2

a = $\frac{1}{2} \notin Z$

karena 2 tidak punya prapeta di Z maka fungsi f(x) = 4x bukan fungsi onto.

Jadi f : Z → 2Z yang didefinisikan dengan f(x) = 4x bukan fungsi bijektif, melainkan fungsi 1-1 dan into.

2.8 Fungsi Invers

Misalkan f adalah fungsi satu-satu dari himpunan X ke himpunan Y dan misalkan y adalah sebarang elemen dari Y, maka f merupakan fungsi onto, elemen y di Y akan mempunyai *pre-image* x di X sehingga $f(x) = y$ dan f

merupakan fungsi satu-satu, x harus tunggal. Jadi, jika f adalah fungsi satu-satu onto maka memetakan elemen y di Y terdapat elemen tunggal x di X sedemikian sehingga $f(x) = y$. Jadi, suatu fungsi yang dinyatakan f^{-1} didefinsikan sebagai:

$$f^{-1}: Y \to X : f^{-1}(y) = x, \forall y \in Y \Leftrightarrow f(x) = y.$$

Fungsi f^{-1} disebut invers dari f dan merupakan fungsi satu-satu dan onto dari Y ke X. Fungsi f dikatakan mempunyai invers (*inversible*) jika dan hanya jika satu-satu dan onto (Raisinghania dan Aggarwal, 1980: 16).

Contoh

$$f: R^+ \to R^+ : f(x) = e^x, \forall x \in R^+$$

dimana R^+ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Maka f adalah fungsi satu-satu dan onto karena $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$. Dan untuk setiap $x \in R^+$ terdapat $(log\, x) \in R^+$ sedemikian sehingga $f(log\, x) = e^{log\, x} = x$. Oleh sebab itu, fungsi invers didefinisikan

$$f^{-1}: R^+ \to R^+ : f^{-1}(y) = log\, y, \forall y \in R^+.$$

Raisinghania dan Aggarwal (1980: 17) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa misalkan $X, Y,$ dan Z adalah sembarang tiga himpunan tak-kosong dan misalkan f dan g adalah fungsi satu-satu X pada Y dan Y pada Z berturut-turut sehingga f dan g merupakan dua fungsi yang *inversible* maka $(g \circ f)$ juga *inversible* dan

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Bukti:

Untuk menunjukkan bahwa $(g \circ f)$ *inversible*, maka harus ditunjukkan bahwa $(g \circ f)$ adalah fungsi satu-satu dan onto. Misalkan x dan y adalah dua elemen sebarang dari X, maka

$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$$

$$g(f(x)) = g(f(y))$$

$$f(x) = f(y) \qquad [g \text{ adalah fungsi satu-satu}]$$

$$x = y \qquad [f \text{ adalah fungsi satu-satu}]$$

Jadi, $(g \circ f)$ adalah fungsi satu-satu.

Untuk menunjukkan bahwa $(g \circ f)$ adalah fungsi onto, misalkan z adalah sebarang elemen dari Z, maka g fungsi onto jika terdapat $y \in Y$ sedemikian sehingga $g(y) = z$. Begitu juga f adalah onto jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $g(x) = y$. Akibatnya,

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$= g(y) \qquad [f(x) = y]$$

$$= z \qquad [g(y) = z]$$

Sehingga untuk sebarang $z \in Z$, terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $(g \circ f)(x) = z$. Jadi, $(g \circ f)$ adalah fungsi onto. Karena $(g \circ f)$ adalah fungsi satu-satu dan onto, maka $(g \circ f)$ *inversible*. Selanjutnya

$$(g \circ f)(x) = z \Rightarrow (g \circ f)^{-1}(z) = x \qquad \text{... (i)}$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = f^{-1}\big(g^{-1}(z)\big)$$

$$= f^{-1}(y) \qquad [g(y) = z \Rightarrow y = g^{-1}(z)]$$

$$= x \qquad [f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)]$$

$$(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = x \qquad \text{... (ii)}$$

Jadi, dari (i) dan (ii) diperoleh $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

2.9 Operasi Biner

Kita mengenal dua macam operasi yaitu operasi uner dan operasi biner. Pertama, operasi uner adalah operasi yang dikenakan kepada satu unsur, contoh operasi uner adalah pangkat dan akar pangkat. Misal pangkat 2 cukup dikenakan kepada unsur tunggal, misalnya 3, jadi 3 pangkat 2 adalah 9, ditulis $3^2 = 9$. Kedua, operasi biner adalah operasi yang dikenakan kepada dua unsur. Yang termasuk operasi biner ini kita kenal dengan operasi dasar aritmetika seperti penjumlahan $(+)$, pengurangan $(-)$, pembagian $(\div)$, dan perkalian $(\times)$. Misal suatu operasi biner dilambangkan dengan " $*$ " yang dikenakan kepada suatu himpunan R, maka operasi biner $*$ dapat kita definisikan sebagai

$$* : R \times R \to R$$

$$*\,(a, b) = c \qquad \dots dengan\ \ a, b, c \in R$$

artinya $a * b = c$

Dari definisi tersebut dapat kita lihat bahwa operasi biner $*$ adalah bersifat tertutup di R. Jadi operasi biner bersifat tertutup tetapi tidak berlaku sebaliknya yaitu bahwa operasi yang tertutup belum tentu operasi biner. Contohnya adalah operasi pangkat diatas. Operasi pangkat dua atau kuadrat yang dikenakan kepada himpunan bilangan bulat bersifat tetutup artinya hasilnya tetap bilangan bulat tetapi operasi pangkat dua adalah uner.

Dummit dan Foote (1980: 17) menyebutkan definisi dari operasi biner sebagai berikut:

1. Operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah suatu fungsi $*: G \times G \to G$. Untuk setiap $a, b \in G$ dapat dituliskan $a * b$ untuk $*\,(a, b)$.
2. Suatu operasi biner " $*$ " pada suatu himpunan G adalah assosiatif jika untuk setiap $a, b, c \in G, a * (b * c) = (a * b) * c$.

3. Jika $"*"$ operasi biner pada suatu himpunan G, elemen-elemen $a, b \in G$ dikatakan komutatif jika $a * b = b * a$. Dikatakan $"*"$ (atau G) komutatif jika untuk setiap $a, b \in G, a * b = b * a$.
4. Setiap unsur di G *punya invers)* atau balikan terhadap operasi $*$

   Misal a^{-1} adalah invers dari unsur a di G $\forall\, a * G\ \exists\, a^{-1} \in G$ sehingga $a^{-1} * a = a * a^{-1} = I$

   Jika $a^{-1} * a = I$ maka a^{-1} disebut invers kiri dari unsur a

   Jika $a * a^{-1} = I$ maka a^{-1} disebut invers kanan dari unsur a

   Jika invers kanan = invers kiri maka dikatakan ada invers unsur a

Contoh

Misalkan B = himpunan bilangan bulat. Operasi + (penjumlahan) pada B merupakan operasi biner, sebab operasi + merupakan pemetaan dari $(B \times B) \rightarrow B$, yaitu $\forall (a, b) \in B \times B$ maka $(a + b) \in B$. Jumlah dua bilangan bulat adalah suatu bilangan bulat pula. Operasi $\div$ (pembagian) pada B bukan merupakan operasi biner pada B sebab terdapat $(a, b) \in B \times B$ sedemikian sehingga $(a \div b) \notin B$, misalnya $(3,4) \in B \times B$ dan $(3:4) \notin B$ (Sukirman, 2005: 35).

2.10 Grup

Himpunan tak-kosong G dikatakan grup jika dalam G terdapat operasi biner yang dinyatakan dengan $"*"$, sedemikian sehingga menurut Herstein (1975: 28) :

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ mengakibatkan $a * (b * c) = (a * b) * c$ (sifat assosiatif)
2. Terdapat suatu elemen $e \in G$ sedemikian sehingga $a * e = e * a = a$ untuk setiap $a \in G$ (e adalah elemen identitas di G)
3. Untuk setiap $a \in G$, terdapat suatu elemen $a^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (a^{-1} adalah invers dari a di G).

Contoh

$\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat, $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup karena berlaku:

1. Untuk setiap $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$. Jadi, operasi $+$ adalah operasi biner pada $\mathbb{Z}$ atau dengan kata lain, operasi + tertutup di $\mathbb{Z}$.
2. Untuk setiap $a, b, c \in \mathbb{Z}$ maka $a + (b + c) = (a + b) + c$. Jadi, $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi sifat assosiatif.
3. Terdapat elemen identitas yaitu $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $a + 0 = 0 + a = a$, untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$.
4. Untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ terdapat a^{-1} yaitu $(-a) \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

Elemen $(-a)$ adalah invers dari a.

Karena himpunan $\mathbb{Z}$ dengan operasi + (penjumlahan) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka $(\mathbb{Z}, +)$ adalah grup.

Grup $(G,*)$ dikatakan *abelian* (komutatif) jika untuk setiap $a, b \in G$ berlaku $a * b = b * a$ (Arifin, 2000: 36).

Contoh

Misalkan m sembarang bilangan bulat tertentu dan misalkan $G = \{m \cdot a : a \in \mathbb{Z}\}$ adalah himpunan semua perkalian bilangan bulat dengan bilangan bulat tertentu m. Maka G adalah grup abelian dengan operasi + (penjumlahan). Himpunan G dengan operasi + (penjumlahan) menurut Raisinghania dan Aggarwal (1980: 34-35) memenuhi :

1. Jika $m \cdot a$ dan $m \cdot b$ adalah dua elemen sembarang dari G maka

$$m \cdot a + m \cdot b = m \cdot (a + b)$$

   Karena $a, b \in \mathbb{Z}$ maka $(a + b) \in \mathbb{Z}$

   Akibatnya $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$ adalah perkalian bilangan bulat $(a + b)$ dengan m, sehingga $m \cdot a + m \cdot b \in G$.

   Jadi, G tertutup terhadap operasi + (penjumlahan).

2. Jika $m \cdot a, m \cdot b, m \cdot c \in G$ maka:

   $(m \cdot a + m \cdot b) + m \cdot c$

   $= \{m \cdot (a + b)\} + m \cdot c$

   $= m \cdot \{(a + b) + c\}$

   $= m \cdot \{a + (b + c)\}$ [keassosiatifan penjumlahan bilangan bulat]

   $= m \cdot a + m \cdot (b + c)$[hukum distributif perkalian terhadap penjumlahan]

   $= m \cdot a + \{m \cdot b + m \cdot c\}$

   Jadi, penjumlahan assosiatif di G.

3. Terdapat $0 \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $m \cdot 0 = 0 \in G$, untuk sembarang elemen $m \cdot a$ dari G,

   $m \cdot 0 + m \cdot a = m(0 + a)$ [hukum distributif]

$= m \cdot a$ [jadi, $0 + a = a$]

$m \cdot a + m \cdot 0 = m \cdot (a + 0)$ [hukum distributif]

$= m \cdot a$ [jadi, $0 + a = a$]

Jadi, $m \cdot 0 + m \cdot a = m \cdot a + m \cdot 0 = m \cdot a, \forall m \cdot a \in G$

4. Jika $m \cdot a$ adalah sembarang elemen di G, maka a adalah bilangan bulat dan begitu juga $(-a)$ dan oleh sebab itu $m \cdot (-a)$ adalah elemen G

   $$m \cdot (-a) + m \cdot a = m \cdot a + m \cdot (-a) = m \cdot 0 = 0$$

   Jadi, setiap elemen $m \cdot a$ di G mempunyai invers penjumlahan yaitu $m \cdot (-a)$ di G.

5. Jika $m \cdot a$ dan $m \cdot b$ adalah dua elemen sembarang dari G maka

   $m \cdot a + m \cdot b = m \cdot (a + b)$ [distributif perkalian terhadap penjumlahan]

   $= m \cdot (b + a)$ [kekomutatifan penjumlahan bilangan bulat]

   $= m \cdot b + m \cdot a$

   Jadi, penjumlahan komutatif di G.

   Jadi, $(G, +)$ adalah grup abelian.

2.11 Sifat-Sifat Grup

Jika G grup dengan operasi $*$, maka menurut Dummit dan Foote (1991: 19) berlaku:

1. Identitas di G adalah tunggal
2. Untuk setiap $a \in G, a^{-1}$ adalah tunggal
3. $(a^{-1})^{-1} = a$, untuk setiap $a \in G$
4. $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$

Sukirman (2005: 47) menambahkan:

5. (Sifat penghapusan atau kanselasi)

Jika $(G,*)$ suatu grup, maka $\forall a, b, c \in G$ berlaku:

i) Jika $a * b = a * c$, maka $b = c$ (sifat kanselasi kiri)

ii) Jika $a * c = b * c$, maka $a = b$ (sifat kanselasi kanan)

Bukti :

Bukti dari sifat-sifat grup (1) dan (2) menurut Dummit dan Foote (1991: 19) :

(1) Jika f dan g keduanya identitas, $f, g \in G$, maka dengan aksioma dari definisi grup $f * g = f$ (ambil $a = f$ dan $e = g$). Dengan aksioma yang sama $f * g = g$ (ambil $a = g$ dan $e = f$). Jadi, $f = g$. Jadi, identitas dari G adalah tunggal.

(2) Diasumsikan b dan c keduanya invers dari a, misal e identitas dari G. Dengan $a * b = e$ dan $c * a = e$, sehingga

$c = c * e$ [definisi e]

$= c * (a * b)$ [$e = a * b$]

$= (c * a) * b$ [sifat assosiatif]

$= e * b$ [$e = c * a$]

$= b$ [definisi e]

Jadi, $c = b$. Jadi, invers dari a adalah tunggal.

(3) Untuk setiap $a \in G$ maka $a^{-1} \in G$ sehingga

$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ (e adalah elemen identitas).

(i) $a * a^{-1} = e$

$(a * a^{-1}) * (a^{-1})^{-1} = e * (a^{-1})^{-1}$

$a * (a^{-1} * (a^{-1})^{-1}) = (a^{-1})^{-1}$ [assosiatif]

$a * e = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

(ii) $a^{-1} * a = e$

$(a^{-1})^{-1} * (a^{-1} * a) = (a^{-1})^{-1} * e$

$((a^{-1})^{-1} * a^{-1}) * a = (a^{-1})^{-1}$ [assosiatif]

$e * a = (a^{-1})^{-1}$

$a = (a^{-1})^{-1}$

Dari (i) dan (ii), maka $a = (a^{-1})^{-1}$.

Sehingga $(a^{-1})^{-1} = a$

Bukti sifat-sifat grup (4) menurut Arifin (2000: 37) :

(4) Misal $c = (a * b)^{-1}$, sehingga dengan definisi c, $(a * b) * c = e$. Dengan sifat assosiatif diperoleh $a * (b * c) = e$. Kedua ruas dioperasikan dengan a^{-1} dari kiri untuk memperoleh bentuk:

$$a^{-1} * \left(a * (b * c)\right) = a^{-1} * e$$

Pada ruas kiri dikenakan sifat assosiatif operasi dan pada ruas kanan dikenakan definisi identitas e, diperoleh:

$(a^{-1} * a) * (b * c) = a^{-1}$

$e * (b * c) = a^{-1}$ [definisi identitas]

$(b * c) = a^{-1}$ [definisi identitas]

Kedua ruas dioperasikan dengan b^{-1} di sebelah kiri dan dengan cara yang sama:

$b^{-1} * (b * c) = b^{-1} * a^{-1}$

$(b^{-1} * b) * c = b^{-1} * a^{-1}$ [sifat assosiatif]

$e * c = b^{-1} * a^{-1}$ [definisi identitas]

$c = b^{-1} * a^{-1}$ [definisi identitas]

$(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ [definisi c]

Jadi terbukti bahwa $(a * b)^{-1} = (b^{-1}) * (a^{-1})$.

Bukti sifat-sifat grup (5) menurut Sukirman (2005: 47) :

(5) i) ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa

$a * b = a * c$, maka

$a^{-1} * (a * b) = a^{-1} * (a * c)$[$G$ grup dan $a \in G$, maka $a^{-1} \in G$]

$(a^{-1} * a) * b = (a^{-1} * a) * c$[sifat assosiatif]

$e * b = e * c$ [definisi identitas]

$b = c$

ii) ambil sembarang $a, b, c \in G$ dan diketahui bahwa $a * c = b * c$, maka

$(a * c) * c^{-1} = (b * c) * c^{-1}$ [G grup dan $c \in G$, maka $c^{-1} \in G$]

$a * (c * c^{-1}) = b * (c * c^{-1})$ [sifat assosiatif]

$a * e = b * e$ [definisi identitas]

$a = b$

2.12 Tabel Cayley

Dalam sebuah grup senantiasa melibatkan hanya satu operasi tertentu. Pendefinisian dari operasi pada suatu himpunan tak kosong merupakan salah satu syarat cukup untuk dapat mengkontruksi suatu struktur grup. Pendefinisan operasi pada himpunan berhingga (*finite*) dapat dilakukan dengan cara yang mudah yaitu dengan membuat tabel yang berisi hasil operasi dari masing-masing dua elemen di himpunan tersebut. Tabel ini disebut tabel Cayley (Sulandra, 1996: 55).

Contoh:

Misalkan A grup dengan operasi pada himpunan tersebut adalah operasi biner "$*$". Himpunan $A = \{e, a\}, e$ elemen identitas. Maka tabel Cayley dari himpunan tersebut adalah:

Tabel 2.12: Tabel Cayley Grup A

$*$	e	a
e	e	a
a	a	e

Dari tabel tersebut, e adalah elemen identitas, sehingga $e * a = a * e = a$ dan agar himpunan A merupakan suatu grup dengan operasi "$*$", maka elemen a harus mempunyai invers (balikan) a^{-1} sedemikian sehingga $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. Sehingga diperoleh $a^{-1} = a$.

2.13 Subgrup

Sub himpunan tak-kosong H dari suatu grup G dikatakan subgrup dari G jika H membentuk grup terhadap operasi yang sama pada grup G (Herstein, 1975: 37).

Herstein (1975: 37) menyatakan dalam sebuah teorema bahwa suatu sub himpunan tak-kosong H dari grup G adalah subgrup dari grup G jika dan hanya jika menurut Herstein (1975: 38) berlaku:

1. $a, b \in H$ maka $a * b \in H$
2. $a \in H$ maka $a^{-1} \in H$

Bukti:

Untuk membuktikan teorema tersebut, perlu dibuktikan kondisi perlu dan cukup bagi subgrup. Kondisi perlu bagi subgrup adalah jika $(H,*) \leq (G,*)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Sedangkan kondisi cukup bagi subgrup adalah jika $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a * b^{-1} \in H$ maka $(H,*) \leq (G,*)$.

Kondisi perlu:

$(H,*) \leq (G,*)$ maka $\forall a, b \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$

Diketahui $(H,*) \leq (G,*)$ maka H adalah sebuah grup, sehingga memenuhi aksioma-aksioma grup yaitu untuk setiap $a, b, c \in H$, maka berlaku sifat assosiatif, H memuat elemen identitas, dan H memuat invers dari setiap elemennya. Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap $a, b, c \in H$ berlaku $a * b \in H$ dan $a^{-1} \in H$. Karena H adalah grup. Karena H grup maka berlaku sifat ketertutupan yaitu untuk setiap $a, b \in H$ maka $a * b \in H$ dan H juga memuat invers dari setiap elemennya yaitu $a^{-1}, b^{-1} \in H$. Karena $a^{-1}, b^{-1} \in H$ maka berlaku $a * b^{-1} \in H$ atau $a^{-1} * b \in H$ (sifat tertutup terhadap operasi " $*$ "). Jadi kondisi perlu bagi subgrup telah terpenuhi.

Kondisi cukup:

Diketahui $H \subseteq G, H \neq \emptyset$ dan $a * b^{-1} \in H$

Akan ditunjukkan bahwa $(H,*) \leq (G,*)$.

H adalah sub himpunan dari G yang memenuhi (1) dan (2). Untuk menunjukkan bahwa H subgrup perlu ditunjukkan bahwa $e \in H$ dan bahwa berlaku sifat assosiatif untuk semua elemen dari H. Karena sifat assosiatif berlaku di G, maka hal ini juga terpenuhi untuk sub himpunan dari G yaitu H. Jika $a \in H$, menurut (2), $a^{-1} \in H$ dan dengan (1), $e = a * a^{-1} \in H$. Sehingga kondisi cukup bagi subgrup terpenuhi. Sehingga teorema terbukti.

Contoh 2.11

Misal G grup bilangan bulat terhadap operasi + (penjumlahan), H sub himpunan yang terdiri dari kelipatan 5. Maka H adalah subgrup dari grup G.

Subgrup yang terdiri dari identitas saja atau semua elemen suatu grup disebut subgrup *trivial*. Sedangkan subgrup selain identitas dan semua elemen suatu grup disebut subgrup sejati.

2.14 Kajian Agama

Secara umum beberapa konsep dari disiplin ilmu telah dijelaskan dalam Al-Qur'an, salah satunya adalah matematika. Konsep dari disiplin ilmu matematika yang ada dalam Al-Qur'an diantaranya adalah masalah statistik, logika, pemodelan, dan aljabar. Teori tentang grup, dimana definisi dari grup sendiri adalah suatu struktur aljabar yang dinyatakan sebagai $(G,\circ)$ dengan G tak-kosong dan " $\circ$ " adalah operasi biner pada G yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemen dalam grup tersebut. Himpunan-himpunan dalam grup mempunyai anggota yang juga merupakan makhluk dari ciptaan-Nya. Sedangkan operasi biner merupakan interaksi antara makhluk-makhluk-Nya, dan sifat-sifat yang harus dipenuhi merupakan aturan-aturan yang telah ditetapkan oleh Allah, artinya sekalipun makhluk-Nya berinteraksi dengan sesama makhluk ia harus tetap berada dalam koridor yang telah ditetapkan oleh Allah.

Kajian mengenai himpunan sudah ada dalam Al-Qur'an. Misalnya kehidupan manusia yang terdiri dari berbagai macam golongan. Dimana golongan juga merupakan himpunan karena himpunan sendiri merupakan kumpulan objek-objek yang terdefinisi.

Dalam Al-Qur'an surat Al-fatihah ayat 7 menyebutkan:

صِرَٰطَ ٱلَّذِينَ أَنۡعَمۡتَ عَلَيۡهِمۡ غَيۡرِ ٱلۡمَغۡضُوبِ عَلَيۡهِمۡ وَلَا ٱلضَّآلِّينَ ٧

Artinya: *(yaitu) jalan orang-orang yang telah Engkau beri nikmat kepada mereka; bukan (jalan) mereka yang dimurkai dan bukan (pula jalan) mereka yang sesat (Q. S. Al-Fatihah: 7).*

Ayat di atas menjelaskan bahwa manusia terbagi menjadi tiga kelompok, yaitu (1) kelompok yang mendapat nikmat dari Allah, (2) kelompok yang dimurkai, dan (3) kelompok yang sesat (Abdussakir, 2007: 79).

Ayat ini melukiskan permohonan manusia kepada Allah untuk membimbingnya ke jalan orang-orang yang diberi nikmat oleh-Nya, seperti nikmat berupa petunjuk, kesuksesan, kepemimpinan orang-orang yang benar, pengetahuan, amal yang baik, yaitu jalan lurus para nabi, orang-orang sholeh, dan semua orang yang mendapat nikmat, rahmat, dan kemurahan-Nya. Jalan yang lurus adalah ajaran tauhid, agama kebenaran, dan keimanan kepada perintah Allah. Ayat ini juga memperingatkan kepada manusia tentang adanya dua jalan yang menyimpang di hadapan manusia yaitu jalan orang-orang yang mendapatkan murka-Nya dan orang-orang yang tersesat. Adapun yang dimaksud dengan orang-orang yang diberi nikmat oleh Allah seperti yang ditunjukkan pada Al Quran surat An-Nisa' [4] ayat 69 :

وَمَآ أَرۡسَلۡنَا مِن رَّسُولٍ إِلَّا لِيُطَاعَ بِإِذۡنِ ٱللَّهِۚ وَلَوۡ
أَنَّهُمۡ إِذ ظَّلَمُوٓاْ أَنفُسَهُمۡ جَآءُوكَ فَٱسۡتَغۡفَرُواْ ٱللَّهَ وَٱسۡتَغۡفَرَ لَهُمُ
ٱلرَّسُولُ لَوَجَدُواْ ٱللَّهَ تَوَّابٗا رَّحِيمٗا ٦٤

Artinya: "*Dan Kami tidak mengutus seseorang rasul melainkan untuk ditaati dengan seizin Allah. Sesungguhnya jikalau mereka ketika menganiaya dirinya*[313] *datang kepadamu, lalu memohon ampun kepada Allah, dan Rasulpun memohonkan ampun untuk mereka, tentulah mereka mendapati Allah Maha Penerima Taubat lagi Maha Penyayang.*"

Ayat di atas menjelaskan bahwa orang-orang yang mendapat nikmat dan rahmat Allah ada empat kelompok: para nabi, orang-orang yang ikhlas, para saksi, dan orang-orang yang beramal shaleh. Sedangkan pemisahan dua kelompok terakhir dalam Al Quran surat Al Fatihah ayat 7 ini dari kelompok lainnya mengisyaratkan bahwa masing-masing kelompok memiliki karakteristik khusus. Dalam hal ini, Imani (2006: 60-61) membagi karakteristik khusus dua kelompok yang terakhir menjadi tiga tafsir :

1. Orang-orang yang tersesat adalah awam yang tidak terbimbing, sedangkan *magdhubi 'alaihim* adalah orang yang tidak terbimbing yang keras kepala atau munafik. Orang-orang yang mendapatkan murka-Nya adalah orang-orang yang disamping kekufuran mereka, mengambil jalan kedegilan dan permusuhan kepada Allah, dan kapan saja mereka dapat, mereka bahkan

melukai para pemimpin Ilahiah dan para nabi sebagaimana disebutkan dalam Al Quran surat Ali Imran ayat 112.

2. Sebagian ahli tafsir percaya bahwa *adh-dhallin* (orang-orang yang tersesat) merujuk pada orang-orang Nasrani; sedangkan *magdhubi 'alaihim* (orang-orang yang mendapatkan murka-Nya) mengacu pada orang-orang yahudi. Kesimpulan ini diambil karena respon-respon khas mereka.
3. Bacaan *adh-dhallin* dimaksudkan kepada orang-orang yang tersesat tapi tidak menekan orang-orang selain mereka untuk tersesat juga, sedangkan *magdhubi 'alaihim* mengacu pada orang-orang yang tersesat dan membuat orang lain tersesat juga. Mereka mencoba mempengaruhi orang lain agar seperti mereka. Acuan makna ini adalah Al Quran surat Asy-Syura ayat 16.

Kembali pada definisi grup yang merupakan suatu himpunan yang tak-kosong dan operasi " $\circ$ " pada G adalah suatu operasi biner yang memenuhi sifat-sifat assosiatif, memuat identitas, dan memuat invers dari setiap elemen dalam grup tersebut. Misal " $\circ$ " adalah operasi pada elemen-elemen S, maka ia disebut biner apabila setiap dua elemen $a, b \in S$, maka $(a \circ b) \in S$. Jadi, jika anggota dari himpunan S dioperasikan hasilnya juga merupakan anggota S. Begitu juga dengan operasi biner dalam dunia nyata. Operasi biner dan sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh grup merupakan interaksi-interaksi dengan berbagai macam pola, ia akan tetap berada dalam himpunan tersebut, yaitu himpunan makhluk ciptaan-Nya.

Aljabar abstrak adalah bidang matematika yang mengkaji struktur aljabar seperti grup, ring, field, modul, dan ruang vektor. Pada dasarnya aljabar abstrak juga membahas tentang himpunan dan operasinya. Sehingga dalam mempelajari materi ini selalu identik dengan sebuah himpunan tidak kosong yang mempunyai elemen-elemen yang dapat dikombinasikan dengan penjumlahan, perkalian, ataupun keduanya atau dapat dioperasikan dengan satu atau lebih operasi biner. Hal tersebut berarti pembahasan-pembahasannya melibatkan objek-objek abstrak yang dinyatakan dalam simbol-simbol (Anonim, 2011:5).

Bidang kajian ini disebut dengan aljabar (saja) sebagai kependekan aljabar abstrak, disebut juga dengan struktur aljabar. Tetapi kebanyakan lebih senang menyebutnya dengan aljabar abstrak untuk membedakannya dengan aljabar elementer. Aljabar abstrak ini banyak digunakan dalam kajian lanjut bidang matematika (teori bilangan aljabar, topologi aljabar, geometri aljabar) (Anonim, 2011:5).

Sistem aljabar merupakan salah satu materi pada bagian aljabar abstrak yang mengandung operasi biner. Himpunan dengan satu atau lebih operasi biner disebut sistem aljabar. Sedangkan sistem aljabar dengan satu operasi biner disebut grup. Kajian himpunan dengan satu operasi biner dalam konsep islam yaitu, bahwa manusia adalah ciptaan Allah secara berpasang-pasangan. Perhatikan firman Allah SWT dalam surat Al-Fathir ayat 11:

وَٱللَّهُ خَلَقَكُم مِّن تُرَابٖ ثُمَّ مِن نُّطۡفَةٖ ثُمَّ جَعَلَكُمۡ أَزۡوَٰجٗاۚ وَمَا تَحۡمِلُ مِنۡ أُنثَىٰ وَلَا
تَضَعُ إِلَّا بِعِلۡمِهِۦۚ وَمَا يُعَمَّرُ مِن مُّعَمَّرٖ وَلَا يُنقَصُ مِنۡ عُمُرِهِۦٓ إِلَّا فِي كِتَٰبٍۚ إِنَّ
ذَٰلِكَ عَلَى ٱللَّهِ يَسِيرٞ ١١

Artinya: *"Dan Allah menciptakan kamu dari tanah Kemudian dari air mani, Kemudian dia menjadikan kamu berpasangan (laki-laki dan perempuan). dan tidak ada seorang perempuanpun mengandung dan tidak (pula) melahirkan melainkan dengan sepengetahuan-Nya. dan*

> *sekali-kali tidak dipanjangkan umur seorang yang berumur panjang dan tidak pula dikurangi umurnya, melainkan (sudah ditetapkan) dalam Kitab (Lauh mahfuzh). Sesungguhnya yang demikian itu bagi Allah adalah mudah.* "

Dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang-pasangan yaitu laki-laki dengan perempuan, sehingga laki-laki dan perempuan harus berpasangan, dan dengan berpasangan (menikah) manusia dapat mengandung dan melahirkan seorang anak dan kemudian anak tersebut juga akan berpasangan dengan anak yang lain.

Maka dari firman di atas bahwa manusia adalah berpasang pasangan antara laki-laki dan perempuan dengan menikah. Akan tetapi cara menikah dengan pasangannya, harus secara hukum agama dan apabila tidak sesuai dengan hukum agama, maka diharamkan bagi kedua pasangan yang akan menikah. Padahal tujuan dalam pernikahan tersebut adalah agar halal.

Jadi menikahlah dengan pasangan kamu sesuai dengan hukum agama

BAB III

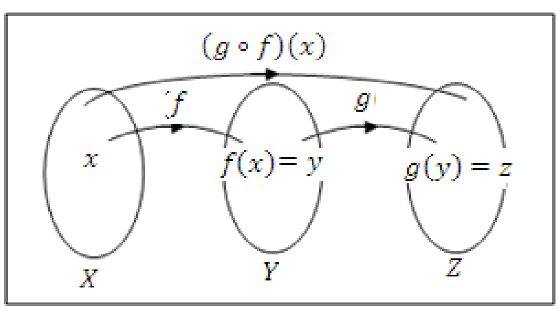
PEMBAHASAN

Dalam pembahasan ini akan dibahas mengenai grup pada fungsi komposisi. Pembahasan dimulai dengan menguraikan atau menjabarkan definisi fungsi komposisi sehingga menjadi sesuai dengan perumusan masalah.

3.1 Fungsi Komposisi

Jika $X, Y,$ dan Z adalah tiga himpunan sebarang sedemikian sehingga $f: X \to Y$ dan $g: Y \to Z$, maka f memetakan sebuah elemen x dari X ke sebuah elemen $f(x) = y$ dari Y dan elemen dari Y ini dipetakan ke sebuah elemen $g(y) = z$ dari Z sedemikian sehingga $z = g(y) = g(f(x))$. Jadi, diperoleh aturan yang memasangkan setiap elemen $x \in X$ ke elemen tunggal $z = g(f(x))$ dari Z. Sehingga diperoleh suatu pemetaan yang dinyatakan $(g \circ f)$ dari X ke Z didefinisikan $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big), \forall x$.

Komposisi dua fungsi f dan g digambarkan sebagai berikut:



Gambar: Komposisi Dua Fungsi

Contoh

Diberikan fungsi $g = \{(1,u),(2,u),(3,v)\}$ yang memetakan $A = \{1,2,3\}$ ke $B = \{u,v,w\}$, dan fungsi $f = \{(u,y),(v,x),(w,z)\}$ yang memetakan $B = \{u,v,w\}$ ke $C = \{x,y,z\}$. Fungsi komposisi dari A ke C adalah $f \circ g = \{(1,y),(2,y),(3,x)\}$.

3.2 Tabel Grup pada Fungsi Komposisi

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{x},\ f_5(x) = 1-x,\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

o	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
f_2	f_2	f_3	f_1	f_6	f_4	f_5
f_3	f_3	f_1	f_2	f_5	f_6	f_4
f_4	f_4	f_5	f_6	f_1	f_2	f_3
f_5	f_5	f_6	f_4	f_3	f_1	f_2
f_6	f_6	f_4	f_5	f_2	f_3	f_1

Table komposisi 3.2

- $(f_1 o f_1)(x) = f_1\big(f_1(x)\big) = f_1(x) = x \ \to f_1(x)$
- $(f_1 o f_2)(x) = f_1\big(f_2(x)\big) = f_1\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x} \to f_2(x)$
- $(f_1 o f_3)(x) = f_1\big(f_3(x)\big) = f_1\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} \to f_3(x)$
- $(f_1 o f_4)(x) = f_1\big(f_4(x)\big) = f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \to f_4(x)$

- $(f_1 o f_5)(x) = f_1\big(f_5(x)\big) = f_1\ (1-x)\ = 1-x\ \rightarrow f_5(x)$

- $(f_1 o f_6)(x) = f_1\big(f_6(x)\big) = f_1\ \left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x}{x-1}\ \rightarrow f_6$

- $(f_2 o f_1)(x) = f_2\big(f_1(x)\big) = f_2(x) = \frac{x}{x-1} \rightarrow\ f_2(x)$

- $(f_2 o f_2)(x) = f_2\big(f_2(x)\big) = f_2\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{(1-x)-1}{1-x}} = \frac{1}{\frac{-x}{1-x}}\ = \frac{1-x}{-x}\ = \frac{x-1}{x} \rightarrow$

  $f_3(x)$

- $(f_2 o f_3)(x) = f_2\big(f_3(x)\big) = f_2\left(\frac{x-1}{1}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{x}\right)} = \frac{x}{x-x+1} = \frac{x}{1} = x\ \rightarrow f_1(x)$

- $(f_2 o f_4)(x) = f_2\big(f_4(x)\big)\ = f_2\left(\frac{1}{x}\right)\ = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} \rightarrow f_6(x)$

- $(f_2 o f_5)(x) = f_2\big(f_5(x)\big) = f_5(1-x) = \frac{1}{1-(1-x)} = \ \frac{1}{1-1+x}\ \ = \frac{1}{x}\ \rightarrow\ f_4(x)$

- $(f_2 o f_6)(x) = f_2\big(f_6(x)\big) = f_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{1-\left(\frac{x}{x-1}\right)} = \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} = \frac{x-1}{-1} = 1-x\ \rightarrow f_5$

- $(f_3 o f_1)(x) = f_3\big(f_1(x)\big) = f_3(x) = \frac{x-1}{x} \rightarrow f_3(x)$

- $(f_3 o f_2)(x) = f_3\big(f_2(x)\big) = f_3\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)-1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)}\ = \frac{\frac{-1(1-x)}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = \frac{1-1+x}{1-x} - \frac{1-x}{1} = x\ \rightarrow$

  f_1

- $(f_3 o f_3)(x) = f_3\big(f_3(x)\big) = f_3\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)-1}{\left(\frac{x-1}{x}\right)} = \frac{\frac{x-1-x}{x}}{\frac{x-1}{x}}\qquad = \frac{-1}{x} - \frac{x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} =$

  $\frac{1}{1-x}\ \rightarrow f_2(x)$

- $(f_3 o f_4)(x) = f_3\big(f_4(x)\big) = f_3\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\ = \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{1}{x}} = \frac{1-x}{x} - \frac{x}{1} = 1-x\ \rightarrow f_5(x)$

- $(f_3 o f_5)(x) = f_3\big(f_5(x)\big) = f_3\ (1-x) = \frac{(1-x)-1}{(1-x)} = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1}\ \rightarrow f_6(x)$

- $(f_3 o f_6)(x) = f_3\big(f_6(x)\big) = f_3\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{x}{x-1}\right)} = \frac{\frac{x-(x-1)}{x-1}}{\frac{x}{x-1}} = \frac{x-x+1}{x-1} = \frac{x-1}{x} = \frac{1}{x} \rightarrow$

  $f_4(x)$

- $(f_4 o f_1)(x) = f_4\big(f_1(x)\big) = f_4(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f_4(x)$

- $(f_4 o f_2)(x) = f_4\big(f_2(x)\big) = f_4\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{1-x}\right)} = 1 - x \rightarrow f_5(x)$

- $(f_4 o f_3)(x) = f_4\big(f_3(x)\big) = f_4\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x}{x-1} \rightarrow f_6(x)$

- $(f_4 o f_4)(x) = f_4\big(f_4(x)\big) = f_4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x \rightarrow f_1(x)$

- $(f_4 o f_5)(x) = f_4\big(f_5(x)\big) = f_4(1-x) = \frac{1}{1-x} \rightarrow f_2(x)$

- $(f_5 o f_1)(x) = f_5\big(f_1(x)\big) = f_5(x) = 1 - x \rightarrow f_5(x)$

- $(f_5 o f_2)(x) = f_5\big(f_2(x)\big) = f_5\left(\frac{1}{1-x}\right) = 1 - \left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1-x-1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} = \frac{x}{x-1} \rightarrow$

  $f_6(x)$

- $(f_5 o f_3)(x) = f_5\big(f_3(x)\big) = f_5\left(\frac{x-1}{x}\right) = 1 - \left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-(x-1)}{x} = \frac{x-x+1}{x} = \frac{1}{x} \rightarrow$

  $f_4(x)$

- $(f_5 o f_4)(x) = f_5\big(f_4(x)\big) = f_5\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x} \rightarrow f_3(x)$

- $(f_5 o f_5)(x) = f_5\big(f_5(x)\big) = f_5(1-x) = 1 - (1-x) = 1 - 1 + x = x \rightarrow f_1(x)$

- $(f_2 o f_2)(x) = f_2\big(f_2(x)\big) = f_5\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1 - \left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x-1-x}{x-1} = \frac{-1}{x-1} = \frac{1}{1-x} \rightarrow f_2(x)$

- $(f_6 o f_1)(x) = f_6\big(f_1(x)\big) = f_6(x) = \frac{x}{x-1} \rightarrow f_6(x)$

- $(f_6 o f_2)(x) = f_6\big(f_2(x)\big) = f_6\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\left(\frac{1}{1-x}\right)-1} = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1-(1-x)}{1-x}} = \frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1-1+x}{1-x}} = \frac{1}{1-x} - \frac{1-x}{x} =$

  $\frac{1}{x} \rightarrow f_4(x)$

- $(f_6 o f_3)(x) = f_6\big(f_3(x)\big) = f_6\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x-1}{x}\right)-1} = \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x-1-x}{x}} = \frac{x-1}{-1} = 1 - x \rightarrow f_5(x)$

- $(f_6 o f_4)(x) = f_6\big(f_4(x)\big) = f_6\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)-1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} \rightarrow f_2(x)$

- $(f_6 o f_5)(x) = f_6\big(f_5(x)\big) = f_6(1-x) = \frac{(-x)}{(1-x)-1} = \frac{1-x}{1-x-1} = \frac{1-x}{-x} = \frac{x-1}{x} \rightarrow f_3(x)$

- $(f_6 o f_6)(x) = f_6\big(f_6(x)\big) = f_6\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{x}{x-1}\right)-1} \quad = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{x-1(x-1)}{x-1}\right)} = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{x-x+1}{x-1}\right)} = \frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)}{\left(\frac{1}{x-1}\right)} =$

  $\frac{x}{x-1} - \frac{x-1}{1} = x \rightarrow f_1(x)$

Karena semua hasil komposisi(o) adalah elemen di G, maka (G,o) memenuhi aksioma grup yaitu:

1. Tertutup di G
2. Assosiatif di G
3. Ada identitas, dari table di atas bahwa f_1 adalah elemen di G

$$e \in G \ \exists\ a.e = e.a = a, yaitu\ f_1(x) \in G$$

   Jadi $f_1 \in G$ adalah identitas di G dari gabungan komposisi.

4. Ada invers dari table di atas kita mempunyai,

$$f_1 o f_1(x) = f_1\ f_2 o f_2(x) = f_3\ f_3 o f_3(x)$$

$$= f_2\ f_4 o f_4(x) = f_1 f_5 o f_5(x) = f_1 f_6 o f_6(x) = f_1$$

Jadi, anggota $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ adalah masing-masing mempunyai invers dan juga memuat di G.

Karena (G,o) memenuhi aksioma-aksioma grup, maka (G,o) merupakan grup.

Jadi, (G,o) terbukti merupakan grup.

3.3 $\boldsymbol{G = \{f/f : R \to R\ ,\ bijektif\}}$

$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \frac{1}{1-x},\ f_3(x) = \frac{x-1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{x},\ f_5(x) = 1 - x,\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}$

Akan di buktikan bahwa fungsi $f_1 - f_6$ diatas merupakan fungsi 1-1 dan onto (bijektif).

1. $f_1(x) = x$ adalah 1-1 dan onto
2. $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$

i) Fungsi 1-1

$f_2(a) = \frac{1}{1-a}, f_2(b) = \frac{1}{1-b}\ ;\ f(a) = f(b) \quad \frac{1}{1-a} = \frac{1}{1-b}$

$= 1 - b = 1 - a$

$b = a$

Jadi f adalah 1-1

ii) Fungsi onto

$\forall\ y \in R\ \exists\ x\ \in R \ni y = \frac{1}{1-x} f(x) = \frac{1}{1-x} = y$

Jadi f adalah onto

3. $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$

i) Fungsi 1-1

$\forall\, a, b\ \in R \ni (f(a) = f(b)\ \rightarrow a = b)$

$\frac{a-1}{a} = \frac{b-1}{b}$

$ab - b = ab - a$

$-b = -a\ \rightarrow a = b$ ⟶ jadi *f* 1-1

ii) Fungsi onto

$\forall\, b\ \in R \ni a\ R\ \rightarrow (f(a) = b)$

$f(a) = \frac{a-1}{a} = b$

Jadi *f* onto

4. $f_4(x) = \frac{1}{x}$

i) Fungsi 1-1

$\forall\, x, y\ \in R \ni f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

$f(x) = \frac{1}{x}\ , f(x) = \frac{1}{y}$

$\frac{1}{x} = \ \frac{1}{y}\ \rightarrow x = y$ ⟶ jadi *f* 1-1

ii) Fungsi onto

$\forall\, y\ \in R \ni x = \frac{1}{y} \in R \ni$

$f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y$ ⟶ jadi *f* onto

5. $f_5(x) = 1 - x$

i) Fungsi 1-1

$\forall\, x, y \in R \;\exists\; f(x) = f(y) \rightarrow x = y$

$f(x) = 1 - x$

$f(y) = 1 - y$

$f(x) = f(y)$

$1 - x = 1 - y$

$x = y$ $\longrightarrow$ jadi *f* 1-1

ii) Fungsi onto

$\forall\, y \in R \;\exists\; x \in R \;\ni f(x) = y$

$f(x) = 1 - x = y \;\; 1 - y = x$

$x = 1 - y$ $\longrightarrow$ jadi *f* onto

6. $f_6(x) = \frac{x}{x-1}$

i) Fungsi 1-1

$\forall\, x, y \in R, f(x) = f(y)$

$\frac{x}{x-1} = \frac{y}{y-1} = x = (y-1) = y(x-1)$

$xy - x = xy - y$

$x = y$ $\longrightarrow$ jadi *f* 1-1

ii) Fungsi onto

$x = xy - y$

$x - xy = -y$

$x(1 - y) = -y$

$x = \frac{-y}{1-y}; \frac{x}{x-1} = y$

$f(x) = \frac{x}{x-1} = \frac{-y}{1-y}; \left(\frac{-y}{1-y} - 1\right) = y$

Jadi *f* onto

Jadi, $\boldsymbol{G = \{f/f : R \to R\}}$ merupakan fungsi bijektif.

1.3 Bukti umum $\boldsymbol{G = \{f/f : R \to R, bijektif\}}$

Misalkan $(\boldsymbol{G, o})$ adalah grup

Bukti:

1. Ambil $f \in G,\ f$ 1-1 dan onto

   Ambil $g \in G\ g\ 1 - 1$ dan onto

   gof 1 – 1 dan onto

   Bukti:

   Misalkan *x* dan *y* adalah dua elemen sebarang dari *X*, maka

   $(g\ o\ f\ (x) = (g\ o\ f)(y)$

   $g\big(f(x)\big) = g\big(f(y)\big)$

   $f(x) = f(y)\ \ [g\ adalah\ fungsi\ satu - satu)$

   $x = y \qquad [f\ adalah\ fungsi\ satu - satu$

   Jadi, $(g\ o\ f)$ adalah fungsi satu-satu.

Misalkan z adalah sebarang elemen dari Z, maka g fungsi onto jika terdapat $y \in Y$ sedemikian sehingga $g(y) = z$. begitunjuga f adalah onto jika terdapat $x \in X$ sedemikian sehingga $g(x) = y$. Akibatnya,

$$(g\ o\ f)(x) = g\big(f(x)\big)$$

$$= g(y) \qquad [f(x) = y]$$

$$= z \qquad [g(y) = z]$$

Sehingga untuk sebarang $z \in Z$, terdapat $z \in X$ ssedemikian sehingga $(g\ o\ f)(x) = z$. Jadi, $(g\ o\ f)$ adalah fungsi onto.

2. $(h\ o\ g) o\ f\ = oh(gof)$

Bukti:

Misalkan X, Y, Z, U adalah empat himpunan tak-kosong dan misalkan f, g, h adalah pemetaan dari X ke Y, Y ke Z, dan Z ke U berturut-turut. Maka harus ditunjukkan bahwa $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. Untuk sebarang $x \in X$, diperoleh

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)\big(f(x)\big)$$

$$= h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

$$= h\big((g \circ f)(x)\big)$$

$$= [h \circ (g \circ f)](x)$$

Jadi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ adalah assosiatif.

3. $\exists\ I \in G$, I 1-1 dan onto

$\forall f \in G\ berlaku\ foI = Iof = f$

$\therefore I = identitas\ di\ G$

4. $\forall\ f \in G\ \exists\ f^{-1} \in G$

f 1-1 dan onto

$\ni\ fof^{-1} = f^{-1}o\ f = I$

Bukti:

$f(x) = f(y) = (f^{-1}o\ f)(x) = (f^{-1}o\ f)(y)$

$f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}\big(f(y)\big)$

$f(x) = f(y) \qquad [f^{-1}\ adalah\ 1 - 1$

$x = y \qquad [\ f\ adalah\ 1 - 1]$

$f^{-1}(y) = z$

$(f^{-1}o\ f)(x) = f^{-1}(f(x)$

= $f^{-1}(y)\quad maka\ f(x) = y \quad [fungsi\ onto]$

=z $maka\ f^{-1}(y) = z \qquad [f\ onto]$

Jadi dari hasil pembuktian di atas bahwa(G, o) adalah grup.

BAB IV

PENUTUP

1.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada Bab III, maka dapat di ambil kesimpulan, bahwa (G, o) pada himpunan fungsi komposisi merupakan grup karena memenuhi semua aksioma-aksionma grup yaitu: tertutup di G, assosiatif di G, ada identitasnya dengan menggunakan tabel komposisi, dan ada inversnya.

Jadi, (G, o) dikatakan suatu grup karena sudah memenuhi semua sifat-sifat grup.

1.2 Saran

Pada skripsi ini, penulis hanya menfokuskan pada pokok bahasan masalah fungsi komposisi, grup. Maka di sarankan kepada peneliti yang lain untuk mengadakan penelitian secara lebih mendalam mengenai grup dengan operasi-operasi yang lain.

DAFTAR PUSTAKA

Abdussakir. 2007. *Ketika Kiai Mengajar Matematika*. Malang: UIN Malang Press.

Anonim. 2009. *Merumuskan Konsep Ilmu pengetahuan*, Jakarta: Ditjen Cipta Karya.

Arifin, Achmad. 2000. *Aljabar*. Bandung : ITB Bandung.

Bhattacharya, P, B, dkk. 1994. *Basic Abstract Algebra*. New York: Cambridge University press.

Dummit, David S. dan Foote, Richard M. 1991. *Abstract Algebra*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.

Herstein, I. N. 1975. *Topiccs in Algebra.* New york: John Wiley & Sons.

Imani, Allamah Kamal Faqih. 2006. *Tafsir Nurul Quran Jilid 1*. Jakarta: Al-Huda.

Purwanto, Agus. 2008. *Ayat-ayat Semesta*. Bandung: Mizan.

Rahman, Subhan MA, Tradisi dan Inovasi Keilmuan Islam Masa Klasik: *Innovation*, vol 5 nomer 10:249-274,2006.

Raisinghania, M. D dan Aggarwal, R. S. 1980. *Modern Algebra.* New Delhi: Ram Nagar.

Sukirman. 2005. *Pengantar Aljabar Abstrak*. Malang: UM Press.

Sulandra, I Made. 1996. *Struktur Aljabar I (Edisi Revisi)*. Malang: IKIP Malang.

Tim Penyusun Kamus Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa. 1989. *Kamus Besar Bahasa Indonesia*. Jakarta: Balai Pustaka.